物性研究 36－5 (1981－8)

「重力場での拡散方程式の解とその特性 (1. インパルス応答)」[1)] への補足

(1981年7月8日受理)

宮崎大・工・応物　　餌 取 寛 次

上記テーマの報告における本文中（以下“本文”と略す）において，拡散粒子数密度の位置に関する分散の評価に以下の補足を付け加えたい。

Langevin方程式（“本文”（2・1）式）から，粒子の自由落下のみを考えると

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\beta v(t)-g+\frac{1}{m}R(t)\,,\qquad \beta=\frac{\gamma}{m} \tag{1}$$

$$<v(t)>=-\frac{g}{\beta}\left[1-\exp(-\beta t)\right],\quad v(0)=0. \tag{2}$$

(2) 式から粒子の位置 z の平均値 $<z(t)>$ は

$$<z(t)>=-\frac{gt}{\beta}\left\{1-\frac{1}{\beta t}\left[1-\exp(-\beta t)\right]\right\}\ . \tag{3}$$

この (3) 式は，重力場の拡散方程式の解として得られたインパルス応答 $\rho(z,\ t)$ の規格化によって得られる平均値 $<z>_g$（“本文”（4・6）式）

$$<z>_g=\int_{-\infty}^{\infty}z\cdot\rho(z,\ t)dz\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z,\ t)dz \tag{4}$$

と全く一致している。一方，分散 $<(\varDelta z)^2>_g$ は (4) 式と同様な計算による結果

$$<(\varDelta z)^2>_g=2Dt \tag{5}$$

を与える（“本文”（4・10）式）。これは，$\rho(z,\ t)$ が密度分布としての性質を有するために，長時間近似 $\frac{\gamma}{m}t\gg 1$ の条件がもろに適用された結果と考える。これに対して，力学の確率過程としての立場から (1) 式を考えると

$$\frac{d}{dt}<z\dot{z}>+\beta<z\dot{z}>=<\dot{z}^2>-g<z>+\frac{1}{m}<z\cdot R(t)> \tag{6}$$

について，$<z\cdot R(t)>=0$ 及びMaxwell粒子としての考慮から $<\dot{z}^2>=(kT)/m$ とし，更に

ETORI, Kanji

(3)式を考慮することによって$<z^2>$が求められる。したがって分散$<(\Delta z)^2>$は次のように計算される。

$$<(\Delta z)^2> = <z^2(t)> - (<z(t)>)^2$$
$$= 2Dt\{1 - \frac{1}{\beta t}[1 - \exp(-\beta t)]\}$$
$$- \frac{2g^2 t}{\beta^3}\{1 + 2\cdot\exp(-\beta t) - \frac{1}{2\beta t}[5 - 4\cdot\exp(-\beta t) - \exp(-2\beta t)]\} \quad (6)$$

ただし，$D = kT/(m\beta)$。

(6)式の近似を考えると

$$\frac{<(\Delta z)^2>}{2Dt} \begin{cases} \approx 1 - \frac{m}{kT}\left(\frac{mg}{\gamma}\right)^2, & \frac{\gamma}{m}t \gg 1 \quad (7) \\ \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{m}t\right)^2 + \frac{m}{kT}\left(\frac{2mg^2}{\gamma}t\right), & \frac{\gamma t}{m} \ll 1. \quad (8) \end{cases}$$

$g = 0$で(7)及び(8)式は従来の解析結果[2,3]と一致する。

(7)式から，重力場としての影響を示す因子mg/γの値に対する範囲が決められる。

$$\sqrt{\frac{kT}{m}} > \frac{mg}{\gamma} > 0. \quad (9)$$

References

1) 餌取：物性研究 vol. 36, No. 4.
2) R. Becker: *Theory of Heat* (Springer-Verlag, New york, 1967) Chap. IV, P. 316-318.
3) F. Reif: *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, London, 1965) Chap. 15, P. 565-567.